Sistemas de prueba y aplicaciones para **Ciore** y su versión de primer orden

Victoria Arce Pistone

Universidad Nacional del Sur

UMA – 2022
(trabajo conjunto con M. Figallo)

La lógica (proposicional) paraconsistente 3-valuada **Ciore** fue desarrollada por Carnielli, Marcos y de Amo, en el contexto del estudio de bases de datos inconsistentes en desde el punto de vista de las lógicas de la inconsistencia formal (LFIs).

- Carnielli, W. A., Marcos, J., & de Amo, S. (2000). Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, 8, 115–152.

Esta lógica tiene características muy particulares como la propagación y retropropagación del operador de consistencia, además, es algebrizable en el sentido de Blok y Pigozzi.

Estos mismos autores consideraron una versión de primer orden de **Ciore** con el nombre de **LFI2***.
Posteriormente, Coniglio, Gomez-Pereira & M. Figallo introdujeron una versión de primer orden para **Ciore**, llamada **QCiore**, preservando el "espíritu" de **Ciore**.

- Coniglio, M, Gomez-Pereira, T, & Figallo, M. (2020). Some model-theoretic results on the 3-valued paraconsistent first order logic QCiore. *The Review of Symbolic Logic*.

En este mismo trabajo, se probaron importantes resultados de la Teoría de Modelos clásica en el contexto de esta lógica, tales como: el *Lema de Lindenbaum-Łos*, *Teorema de Tarski y Vaught*, *Teorema de consistencia de Robinson*, etc.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.
- Cálculo de secuentes libre de corte para **Ciore**.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.
- Cálculo de secuentes libre de corte para **Ciore**.
- Algunas aplicaciones del Teorema de Elimación de Corte.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.
- Cálculo de secuentes libre de corte para **Ciore**.
- Algunas aplicaciones del Teorema de Elimación de Corte.
- La lógica de primer orden **QCiore**.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.
- Cálculo de secuentes libre de corte para **Ciore**.
- Algunas aplicaciones del Teorema de Elimación de Corte.
- La lógica de primer orden **QCiore**.
- Teoría de la prueba para **QCiore**.

Esta comunicación está organizada como sigue:

- Presentación de **Ciore** y sus propiedades.
- Cálculo de secuentes libre de corte para **Ciore**.
- Algunas aplicaciones del Teorema de Elimación de Corte.
- La lógica de primer orden **QCiore**.
- Teoría de la prueba para **QCiore**.
- Árboles de descomposición y completitud a la Schütte.

La lógica proposicional **Ciore** está definida sobre la signatura $\Sigma = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \circ\}$ mediante el siguiente cálculo de Hilbert:

Axiomas esquema:

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \tag{Ax1}$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \tag{Ax2}$$

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \tag{Ax3}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \tag{Ax4}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta \tag{Ax5}$$

$$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta) \tag{Ax6}$$

$$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta) \tag{Ax7}$$

$$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)) \tag{Ax8}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \vee \alpha \tag{Ax9}$$

Axiomas esquema: (cont.)

$$\alpha \vee \neg\alpha \qquad (\mathbf{Ax}10)$$

$$\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) \qquad (\mathbf{bc1})$$

$$\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha) \qquad (\mathbf{ci})$$

$$\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha \qquad (\mathbf{cef})$$

$$(\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \wedge \beta) \qquad (\mathbf{cor}_1)$$

$$(\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \vee \beta) \qquad (\mathbf{cor}_2)$$

$$(\circ\alpha \vee \circ\beta) \leftrightarrow \circ(\alpha \to \beta) \qquad (\mathbf{cor}_3)$$

Regla de Inferencia:

(MP)

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Teorema

El sistema **Ciore** *es correcto y completo con respecto a la siguiente matriz 3-valuada* $M_e = \langle \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ *sobre la signatura* Σ *con dominio* $\mathcal{T} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ *y conjunto de valores designado* $\mathcal{D} = \{1, \frac{1}{2}\}$*, donde las tablas de verdad son:*

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

	$\neg$	$\circ$
1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1

En

- Avron, A., Konikowska, B., & Zamansky, A. (2012). Modular Construction of Cut-Free Sequent Calculi for Paraconsistent Logics. *Proceedings of the 27th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 85–94

se presentó una construcción sistemática y modular de cálculos de secuentes libres de corte para una clase importante de lógicas paraconsistentes denominados C-sistemas.
Sin embargo, esta construcción no aplica a **Ciore** ya que esta lógica no valida las *Leyes de De Morgan*, pero si vale la siguiente ley

$$((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge (\beta \wedge \neg\beta)) \to \neg(\alpha \vee \beta)$$

y ningún sistema estudiado por Avron et al. considera esta opción.

Aplicamos el método desarrollado en

- Avron, Ben-Naim, & Konikowska. Cut-free ordinary sequent calculi for logics having generalzed finite–valued semantics. *Logica Universalis* **1**, 41–69, 2006.

para construir un cálculo de secuentes para **Ciore** que goce de la propiedad de eliminación de corte.

Definición

Llamaremos **GCiore** *al cálculo que tiene como axioma*

$$\alpha \Rightarrow \alpha,$$

las reglas estructurales de corte y debilitamiento a izquierda y derecha

$$(\mathrm{w} \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow \mathrm{w})\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

y las reglas lógicas:

Reglas para el conectivo $\vee$:

$$(\vee \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow \vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$(\neg\vee \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

Reglas para el conectivo $\wedge$:

$$(\wedge \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$(\neg\wedge \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta \;\; \Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta, \alpha \;\; \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \;\; \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg\wedge)\quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

Reglas para el conectivo $\rightarrow$:

$$(\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow\rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta}$$

$$(\neg\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta, \beta \qquad \Gamma, \alpha, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg\rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \rightarrow \beta)}$$

Reglas para los conectivos $\neg$ y $\circ$:

$$(\Rightarrow \neg) \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

$$(\neg\neg \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg\neg) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$(\circ \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}{\Gamma, \circ\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\alpha}$$

$$(\neg\circ \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg \circ \alpha \Rightarrow \Delta}$$

Entonces,

Teorema

(Correctitud y completitud) Sea $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *un secuente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es* $\mathcal{M}_e$*-válido,*

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es* **GCiore***-demostrable.*

y

Entonces,

Teorema

(Correctitud y completitud) Sea $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *un secuente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es* $\mathcal{M}_e$*-válido,*

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es* **GCiore***-demostrable.*

y

Teorema

(de Eliminación de Corte) Si $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es* **GCiore***-demostrable, entonces existe una* $\mathcal{G}$*Ciore-prueba para* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *en la que no se hace uso de la regla de corte.*

Introducimos la noción de *subfórmula generalizada* con el objeto de proveer un método de decisión sintáctico para **Ciore**.

Definición

Lel conjunto de todas las subfórmulas generalizadas de γ, $\mathbf{gsub}(\gamma)$, *es el menor conjunto de fórmulas (en el sentido de inclusión) que verifica las siguientes condiciones:*

1. $\alpha \in \mathbf{gsub}(\alpha)$.
2. $\mathbf{gsub}(\alpha) \subseteq \mathbf{gsub}(\neg\alpha)$.
3. $\mathbf{gsub}(\alpha) \cup \mathbf{gsub}(\beta) \subseteq \mathbf{gsub}(\alpha \# \beta)$ *donde* $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
4. $\mathbf{gsub}(\neg\alpha) \cup \mathbf{gsub}(\neg\beta) \subseteq \mathbf{gsub}(\neg(\alpha \# \beta))$ *donde* $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
5. $\mathbf{gsub}(\neg\alpha) \subseteq \mathbf{gsub}(\circ\alpha)$.

Entonces,

Observación

De la definición anterior concluimos que para toda fórmula α se verifica

1. α *y* $\neg\alpha$ *son subfórmulas generalizadas de* $\circ\alpha$,
2. α *y* $\neg\alpha$ *son subfórmulas generalizadas de* $\neg\circ\alpha$,
3. α *es subfórmula generalizada de* $\neg\neg\alpha$.

Entonces,

Observación

De la definición anterior concluimos que para toda fórmula α se verifica

1. α *y* $\neg\alpha$ *son subfórmulas generalizadas de* $\circ\alpha$,
2. α *y* $\neg\alpha$ *son subfórmulas generalizadas de* $\neg\circ\alpha$,
3. α *es subfórmula generalizada de* $\neg\neg\alpha$.

Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, el conjunto de todas las subfórmulas generalizadas de Γ es

$$\mathbf{gsub}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{gsub}(\gamma_i)$$

y

$$\mathbf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \stackrel{def}{=} \mathbf{gsub}(\Gamma) \cup \mathbf{gsub}(\Delta).$$

Lema (Propiedad de la Subfórmula Generalizada)

Sea $\mathcal{D}$ una **GCiore**-prueba sin corte de $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Entonces, toda fórmula que ocurre en cualquier secuente en $\mathcal{D}$, es subfórmula generalidada de alguna fórmula que ocurre en $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Esto es, si $\Pi \Rightarrow \Lambda$ es un secuente en $\mathcal{D}$ entonces

$$\Pi \cup \Lambda \subseteq \mathbf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta)$$

Es claro que si $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es un secuente arbitrario, $\mathbf{gsub}(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ es un conjunto finito. Por lo tanto, no es difícil especificar un proceso de decisión para **GCiore**, adaptando el procedimiento dado por Gentzen para **PK** (la versión proposicional de **LK**). Luego,

Teorema

Ciore *tiene un proceso de decisión sintáctico (bottom-up proof-search).*

A continuación, veremos que, si bien **Ciore** es una lógica paraconsistente, ninguna contradicción es válida en esta lógica. Más precisamente, ninguna contradicción es demostrable en **GCiore**.

Lema

Sea α una fórmula arbitraria. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ *es* **GCiore**-*probable,*
2. *el secuente vacío* $\Rightarrow$ *es* **GCiore**-*probable.*

Corolario

Ninguna contradicción es probable en **GCiore**.

Dem. Supongamos que existe α tal que $\Rightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$ es probable. Entonces, por el lema anterior, el secuente vacío es probable. Luego, por el Teorema de Eliminación de Corte, existe una prueba sin corte para el secuente vacío, lo que es imposible. $\square$

Corolario

Para cualquier teorema α de **Ciore**, *y toda $\mathcal{M}_e$-valuación v,*

$$v(\alpha) = \mathbf{1}.$$

Coniglio, Gomez-Pereira y M. Figallo, extendieron **Ciore** al primer orden de la siguiente manera. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden que extiende al lenguaje de **Ciore**. (aquí seguimos a Takeuti)

Definición

QCiore *es la lógica determinada por el cálculo estilo Hilbert que se obtiene extendiendo* **Ciore** *(expresada en el lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$) agregando los siguientes axiomas:*

Axiomas esquema:

$$\varphi(t) \to \exists x \varphi(x), \qquad \textbf{(Ax11)}$$

$$\forall x \varphi(x) \to \varphi(t), \qquad \textbf{(Ax12)}$$

$$\circ \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \circ \varphi, \qquad \textbf{(Ax13)}$$

$$\circ \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \circ \varphi, \qquad \textbf{(Ax14)}$$

donde t es un término arbitrario, $\varphi(t)$ y $\varphi(x)$ son $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{t}\right)$ and $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$, respectivamente.

Reglas de inferencia

$$(\forall\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi \to \psi(a)}{\phi \to \forall x \psi(x)} \qquad \text{si } a \text{ no ocurre en } \phi$$

$$(\exists\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi(a) \to \psi}{\exists x \phi(x) \to \psi} \qquad \text{si } a \text{ no ocurre en } \psi$$

donde t es un término arbitrario, $\varphi(t)$ y $\varphi(x)$ son $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{t}\right)$ and $\left(\varphi(a)\,\frac{a}{x}\right)$, respectivamente.

Reglas de inferencia

$$(\forall\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi \to \psi(a)}{\phi \to \forall x \psi(x)} \qquad \text{si } a \text{ no ocurre en } \phi$$

$$(\exists\text{-}\mathbf{In})\ \frac{\phi(a) \to \psi}{\exists x \phi(x) \to \psi} \qquad \text{si } a \text{ no ocurre en } \psi$$

Estos mismos autores presentaron una versión semántica de **QCiore** usando *relaciones parciales* pensadas como ternas. Mas precisamente,

Sea $\mathbf{3} = \{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\}$ y consideremos la estructura $3 = \langle \mathbf{3}; \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \circ \rangle$ dada por la matriz $\mathcal{M}_e$.
Sea X un conjunto no vacío. Una *terna sobre* X es un map $r : X \longrightarrow \mathbf{3}$. Escribimos

$$r = \langle r_{\oplus}, r_{\ominus}, r_{\odot} \rangle$$

donde $r_{\oplus} = r^{-1}(1)$, $r_{\odot} = r^{-1}(\frac{1}{2})$, $r_{\ominus} = r^{-1}(0)$. Como es usual, denotamos $\mathbf{3}^X$ al conjunto de todas las ternas sobre X. Es claro que $\mathbf{3}^X$ hereda la estructura de 3 definiendo las operaciones punto a punto.

Proposición (CG-PF)

Sean $r = (r_\oplus, r_\ominus, r_\odot)$ y $u = (u_\oplus, u_\ominus, u_\odot)$ ternas sobre X. Entonces:

(i) $r \wedge u = ((r_\oplus \cap u_\oplus) \cup (r_\oplus \cap u_\odot) \cup (r_\odot \cap u_\oplus), r_\ominus \cup u_\ominus, r_\odot \cap u_\odot)$,

(ii) $r \vee u = (r_\oplus \cup u_\oplus, r_\ominus \cap u_\ominus, (r_\odot \cap u_\ominus) \cup (r_\ominus \cap u_\odot) \cup (r_\odot \cap u_\odot))$,

(iii) $r \to u = (r_\ominus \cup u_\oplus, (r_\oplus \cup r_\odot) \cap u_\ominus, (r_\oplus \cup r_\odot) \cap u_\odot)$,

(iv) $\neg r = (r_\ominus, r_\oplus, r_\odot)$,

(v) $\circ r = (r_\oplus \cup r_\ominus, r_\odot, \emptyset)$.

- Una *estructura parcial para* **QCiore** es un par $\mathfrak{A} = \langle A, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $A \neq \emptyset$ (dominio) y $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ es una función tal que
  - si R es una letra de predicado n-ario, entonces, $R^{\mathfrak{A}} = \langle R^{\mathfrak{A}}_{\oplus}, R^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, R^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle$ es una terna sobre A^n, esto es,

$$R^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow \mathbf{3}$$

  - $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ is defined as usual over $\mathcal{F}$ and $\mathcal{C}$.

- Una *estructura parcial para* **QCiore** es un par $\mathfrak{A} = \langle A, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $A \neq \emptyset$ (dominio) y $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ es una función tal que
  - si R es una letra de predicado n-ario, entonces, $R^{\mathfrak{A}} = \langle R^{\mathfrak{A}}_{\oplus}, R^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, R^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle$ es una terna sobre A^n, esto es,

$$R^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow \mathbf{3}$$

  - $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ is defined as usual over $\mathcal{F}$ and $\mathcal{C}$.

- Una *asignación en* A es un map $s : \mathcal{V} = \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b \longrightarrow A$. Denotamos $S(A)$ al conjunto de todas las asignaciones en A.

- Una *estructura parcial para* **QCiore** es un par $\mathfrak{A} = \langle A, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $A \neq \emptyset$ (dominio) y $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ es una función tal que
  - si R es una letra de predicado n-ario, entonces, $R^{\mathfrak{A}} = \langle R^{\mathfrak{A}}_{\oplus}, R^{\mathfrak{A}}_{\ominus}, R^{\mathfrak{A}}_{\odot} \rangle$ es una terna sobre A^n, esto es,
  $$R^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow \mathbf{3}$$
  - $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ is defined as usual over $\mathcal{F}$ and $\mathcal{C}$.
- Una *asignación en* A es un map $s : \mathcal{V} = \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b \longrightarrow A$. Denotamos $S(A)$ al conjunto de todas las asignaciones en A.
- El valor de un término t por la asignación s, $t^{\mathfrak{A}}[s]$, es la usual.

Definición (CG-PF)

Sea A no vacío. Dado un conjunto Z, $\wp(Z)_+$ es el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de Z. Si $x \in \mathcal{V}$ sean $\widehat{\forall x} : \wp(S(A)) \longrightarrow \wp(S(A))$ y $\widehat{\exists x} : \wp(S(A)) \longrightarrow \wp(S(A))$ definidas como sigue, para todo $Y \subseteq S(A)$:

$$\widehat{\forall x}(Y) := \{s \in S(A) \ : \ s_x^a \in Y \text{ para todo } a \in A\},$$

$$\widehat{\exists x}(Y) := \{s \in S(A) \ : \ s_x^a \in Y \text{ para todo } a \in A\}.$$

Las funciones $\widetilde{\forall} : \wp(\mathbf{3})_+ \to \mathbf{3}$ y $\widetilde{\exists} : \wp(\mathbf{3})_+ \to \mathbf{3}$ están definidas como sigue, para todo $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbf{3}$:

$$\widetilde{\forall}(Y) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in Y, 0 \notin Y \\ \frac{1}{2} & \text{si } Y = \{\frac{1}{2}\} \\ 0 & \text{si } 0 \in Y \end{cases} \qquad \widetilde{\exists}(Y) := \begin{cases} 1 & \text{si } Y \neq \{\frac{1}{2}\}, Y \neq \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } Y = \{\frac{1}{2}\} \\ 0 & \text{si } Y = \{0\} \end{cases}$$

Definición (CG-PF)

Una **QCiore**-*estructura* es un par $\langle \mathfrak{A}, \| \cdot \|^{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que $\mathfrak{A}$ es una estructura parcial para **QCiore** y $\| \cdot \|^{\mathfrak{A}} : \mathscr{L}(\Theta) \to \mathbf{3}^{S(\mathfrak{A})}$ es un map definido recursivamente como sigue, para todo $s \in S(\mathfrak{A})$:

1. Si $P(t_1, \ldots, t_n)$ es atómica,
$\|P(t_1, \ldots, t_n)\|^{\mathfrak{A}}(s) = P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s])$,
2. $\|\varphi \wedge \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \wedge \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$,
3. $\|\varphi \vee \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \vee \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$,
4. $\|\varphi \to \psi\|^{\mathfrak{A}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{A}} \to \|\psi\|^{\mathfrak{A}}$,
5. $\|\neg\varphi\|^{\mathfrak{A}} = \neg\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}$,
6. $\|\circ\varphi\|^{\mathfrak{A}} = \circ\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}$,
7. $\|\forall x\varphi\|^{\mathfrak{A}}(s) = \widetilde{\forall}(\{\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}(s_x^a) \ : \ a \in A\})$,
8. $\|\exists x\varphi\|^{\mathfrak{A}}(s) = \widetilde{\exists}(\{\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}(s_x^a) \ : \ a \in A\})$.

Definición

Sea $\langle \mathfrak{A}, \| \cdot \|^{\mathfrak{A}} \rangle$ una **QCiore**-estructura, φ una fórmula y $s \in S(\mathfrak{A})$.
(i) *s satisface* φ e $\mathfrak{A}$, escrito $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, si $s \in \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot}$.
(ii) φ es *válida* en $\mathfrak{A}$, escrito $\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$, si

$$\|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\oplus} \cup \|\varphi\|^{\mathfrak{A}}_{\odot} \; = \; S(\mathfrak{A})$$

(iii) φ es **QCiore**-consecuencia de Γ, escrito $\Gamma \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$, si para toda **QCiore**-estructura $\mathfrak{A}$, se tiene que: $\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$ implica que $\mathfrak{A} \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$.
(iv) *s satisface* al secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ si s satisface no satisface **ninguna** fórmula de Γ, o bien, s satisface **alguna** fórmula de Δ.
(v) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es válido si para toda **QCiore**-estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación s en $\mathfrak{A}$, s satisface $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Teorema (de correctitud y completitud)

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas, $\Gamma \vdash_{\mathbf{QCiore}} \varphi$ ssi $\Gamma \models_{\mathbf{QCiore}} \varphi$.

Definición

Sea **GQCiore** *el cálculo de secuentes que se obtiene de extender* **GCiore** *agregando las siguientes reglas:*

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\phi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \phi(x)}$$

donde t es un término arbitrario y la autovariable a no ocurre en el secuente inferior. Además, en $(\Rightarrow \forall)$ todas las ocurrencias de a en $\phi(a)$ están indicadas.

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\phi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \phi(x)}$$

donde la autovariable a no ocurre en el secuente inferior y t es un término arbitrario.

$$(\circ\exists \Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ\exists x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ\exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\exists x\phi(x)}$$

donde la autovariable a no ocurre en el secuente inferior y t es un término arbitrario.

$$(\circ\forall \Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ\forall x\phi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \circ\forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\phi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ\forall x\phi(x)}$$

donde t es un término arbitrario.

$$(\circ\exists\Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(a),\Gamma\Rightarrow\Delta}{\circ\exists x\phi(x),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\circ\exists)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\circ\phi(t)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\circ\exists x\phi(x)}$$

donde la autovariable a no ocurre en el secuente inferior y t es un término arbitrario.

$$(\circ\forall\Rightarrow)\ \frac{\circ\phi(t),\Gamma\Rightarrow\Delta}{\circ\forall x\phi(x),\Gamma\Rightarrow\Delta} \qquad (\Rightarrow\circ\forall)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\circ\phi(t)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\circ\forall x\phi(x)}$$

donde t es un término arbitrario.

Proposición

Los siguientes secuentes son probables en **GQCiore**.

1. $\Rightarrow\phi(t)\to\exists x\phi(x)$,
2. $\Rightarrow\forall x\phi(x)\to\phi(t)$,
3. $\Rightarrow\circ\exists x\phi(x)\leftrightarrow\exists x\circ\phi(x)$,
4. $\Rightarrow\circ\forall x\phi(x)\leftrightarrow\exists x\circ\phi(x)$.

Proposición

Las siguientes reglas son derivables **GQCiore**.

1. $$\frac{\Rightarrow \phi \to \psi(a)}{\Rightarrow \phi \to \forall x \psi(x)}$$ *donde a no ocurre en* ϕ,
2. $$\frac{\Rightarrow \phi(a) \to \psi}{\Rightarrow \exists x \phi(x) \to \psi}$$ *donde a no ocurre en* ψ.

Proposición

Las siguientes reglas son derivables **GQCiore**.

1. $\dfrac{\Rightarrow \phi \to \psi(a)}{\Rightarrow \phi \to \forall x \psi(x)}$ *donde a no ocurre en* ϕ,
2. $\dfrac{\Rightarrow \phi(a) \to \psi}{\Rightarrow \exists x \phi(x) \to \psi}$ *donde a no ocurre en* ψ.

Teorema (de Correctitud)

Si el secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es **GQCiore**-probable, entonces $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es válido.

Definimos, para cada secuente S, un árbol (posiblemente infinito), llamado *árbol de descomposición* (o de reducción) de S, a partir del cual podremos obtener una prueba sin corte para S, o bien, una **QCiore**-estructura que refute a S. (Schütte). Este árbol, denotado $\mathbf{T}(S)$, contiene un secuente en cada nodo.

Definición

Se construye en etapas como sigue.
Etapa 0: Escriba S como raiz del árbol.
Etapa k $(k > 0)$: Esta se define por casos:
Caso I: Todos los secuentes en las hojas del árbol tienen una fórmula en común en el antecedente y el sucedente. Entonces, pare.
Caso II: No es el caso I. Entonces, esta etapa se define según k sea

$$k \equiv 0, 1, \ldots, 26 \pmod{27}.$$

Todas las variables libres que ocurren en cualquier secuente que haya sido obtenido antes de la etapa k están **disponibles** en la etapa k. Si no hubiese ninguna variable disponible, elija cualquier variable libre y diga que esta disponible.

(1) $k \equiv 0$. $(\circ \Rightarrow)$-reducción. Sea $\Pi \Rightarrow \Lambda$ un secuente en una hoja del árbol que ha sido obtenido en la etapa $k-1$. Sean $\circ A_1, \ldots, \circ A_n$ todas las fórmulas en Π cuyo conectivo principal es $\circ$, y a las cuales no se les ha aplicado el paso de reducción (1) en etapas anteriores. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_n,$$

donde C_i es A_i o $\neg A_i$, arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$ (hijos). Es decir, hay 2^n de estos secuentes como hijos de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(2) $k \equiv 1$. $(\Rightarrow \circ)$-reducción. Sean $\circ A_1, \ldots, \circ A_n$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\circ$, y a las cuales no se les ha aplicado el paso de reducción (2) en etapas anteriores. Entonces, escriba el siguiente secuente arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$ (un solo hijo).

$$\Pi, A_1, \ldots, A_n, \neg A_1, \ldots, \neg A_n \Rightarrow \Lambda$$

(3) $k \equiv 2$. $(\Rightarrow \neg)$-reducción. Sean $\neg A_1, \ldots, \neg A_n$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\neg$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción todavía. Entonces, escriba

$$\Pi, A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \Lambda$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(4) $k \equiv 3$. $(\neg\circ \Rightarrow)$-reducción. Sean $\neg \circ A_1, \ldots, \neg \circ A_n$ todas las fórmulas en Π cuyos conectivos principales son $\neg\circ$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción todavía.

Entonces, escriba

$$\Pi, A_1, \ldots, A_n, \neg A_1, \ldots, \neg A_n \Rightarrow \Lambda$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(5) $k \equiv 4$. $(\wedge \Rightarrow)$-reducción. Sean $A_1 \wedge B_1, \ldots, A_n \wedge B_n$ todas las fórmulas en Π cuyo conectivo principal es $\wedge$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba

$$\Pi, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n \Rightarrow \Lambda$$

above $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(6) $k \equiv 5$. $(\Rightarrow \wedge)$-reducción. Let $A_1 \wedge B_1, \ldots, A_n \wedge B_n$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\wedge$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_n,$$

donde C_i es A_i o B_i, arriba $\Pi \Rightarrow \Lambda$. Hay 2^n de estos secuentes como hijos de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(7) $k \equiv 6$. ($\vee \Rightarrow$)-reducción. Se define de manera similar a (6).

(8) $k \equiv 7$. ($\Rightarrow \vee$)-reducción. Se define de manera similar a (5).

(9) $k \equiv 8$. ($\rightarrow\Rightarrow$)-reducción. Sean $A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n$ todas las fórmulas en Π cuyo conectivo principal es $\rightarrow$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba los siguientes secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$

$$\Pi, B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k} \Rightarrow \Lambda, A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{n-k}},$$

donde $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_{n-k}$ y $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ es una permutacíon de $(1, 2, \dots, n)$. Hay 2^n de estos secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(10) $k \equiv 9$. $(\Rightarrow\rightarrow)$-reducción. Sean $A_1 \rightarrow B_1, \ldots, A_n \rightarrow B_n$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\rightarrow$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba

$$\Pi, A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow \Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_n$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(11) $k \equiv 10$. $(\neg\vee \Rightarrow)$-reducción. Sean $\neg(A_1 \vee B_1), \ldots, \neg(A_n \vee B_n)$ todas las fórmulas en Π cuyos conectivos principales son $\neg\vee$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba

$A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}, \neg B_{i_1}, \ldots, \neg B_{i_k}, \neg A_1, \ldots, \neg A_n, \Pi \Rightarrow$
$\Lambda, A_{j_1}, \ldots, A_{j_{n-k}}, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{n-k}}$

donde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ and $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ es una permutacíon de $(1, 2, \ldots, n)$. Hay 2^n de estos secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(12) $k \equiv 11$. $(\Rightarrow \neg\vee)$-reducción. Let $\neg(A_1 \vee B_1), \ldots, \neg(A_n \vee B_n)$ todas las fórmulas en Λ cuyos conectivos principales son $\neg\vee$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_n$$

donde C_i es una de las fórmulas A_i, $\neg A_i$, B_i o $\neg B_i$ ($1 \leq i \leq n$). Tomando todas las posibles combinaciones tenemos 4^n secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(13) $k \equiv 12$. $(\neg\wedge \Rightarrow)$-reducción. Sean $\neg(A_1 \wedge B_1), \ldots, \neg(A_n \wedge B_n)$todas las fórmulas en Π cuyos conectivos principales son $\neg\wedge$,y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$\neg S', \Pi \Rightarrow \Lambda, S$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$, donde, dado el conjunto $F_{AB} = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$, $S \subseteq F_{AB}$, $\neg S := \{\neg C : C \in S\}$ y $S' = \{C_i : C_i = \neg A_i$ if $B_i \notin S$ o $C_i = \neg B_i$ if $A_i \notin S\}$. Es claro que $|F_{AB}| = 2n$, y por lo tanto, hay $|\mathcal{P}(F_{AB})| = 2^{|F_{AB}|} = 2^{2n} = 4^n$ de estos secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(14) $k \equiv 13$. $(\Rightarrow \neg\wedge)$-reducción. Sean $\neg(A_1 \wedge B_1), \ldots, \neg(A_n \wedge B_n)$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\neg\wedge$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún $(\Rightarrow \neg\wedge)$-reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$\Pi, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \Rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_n$$

donde C_i es una de las fórmulas $\neg A_i$, o $\neg B_i$ ($1 \leq i \leq n$). Tomando todas las posibles combinaciones tenemos 2^n secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(15) $k \equiv 14$. $(\neg \rightarrow \Rightarrow)$-reducción. Let $\neg(A_1 \rightarrow B_1), \ldots, \neg(A_n \rightarrow B_n)$ todas las fórmulas en Π cuyos conectivos principales son $\neg \rightarrow$,y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_n, \neg A_{i_1}, \ldots, \neg A_{i_k}, \Pi \Rightarrow \Lambda, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{n-k}}$$

donde $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ y $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ es una permutacíon de $(1, 2, \ldots, n)$. Hay 2^n de estos secuentes arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(16) $k \equiv 15$. $(\Rightarrow \neg \rightarrow)$-reducción. Sean $\neg(A_1 \rightarrow B_1), \ldots, \neg(A_n \rightarrow B_n)$ todas las fórmulas en Λ cuyo conectivo principal es $\neg \rightarrow$, y a las cuales no se les ha aplicado ningún $(\Rightarrow \neg \rightarrow)$-reducción en etapas previas. Entonces, escriba todos los secuentes de la forma

$$S_{C_1,\ldots,C_n}, \Pi \ldots, B_n \Rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_n$$

donde C_i es una de las fórmulas A_i, $\neg A_i$, o $\neg B_i$ ($1 \leq i \leq n$); $S_{C_1,\ldots,C_n} \subseteq \{B_1, \ldots, B_n\}$ es tal que si $C_i = A_i$, entonces $B_i \notin S_{C_1,\ldots,C_n}$. Tenemos 3^n de estos secuentesarriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(17) $k \equiv 16$. $(\neg\neg \Rightarrow)$-reducción. Sean $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$ todas las fórmulas en Π cuyos conectivos principales son $\neg\neg$,y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Entonces, escriba

$$A_1, \ldots, A_n, \Pi \Rightarrow \Lambda$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(18) $k \equiv 17$. $(\Rightarrow \neg\neg)$-reducción. Sean $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$ todas las fórmulas de Λ cuyos conectivos principales son $\neg\neg$, y a las cuales no se les ha aplicado una $(\Rightarrow \neg\neg)$-reducción en alguna etapa anterior. Entonces, escriba el siguiente secuente arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(19) $k \equiv 18$. $(\forall \Rightarrow)$-reducción. Sean $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$ todas las fórmulas en Π cuyo conectivo principal es $\forall$. Sea a_i la primer variable disponible en esta etapa que no ha sido usada en una reducción de $\forall x_i A_i(x_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, escriba

$$A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n), \Pi \Rightarrow \Lambda$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(20) $k \equiv 19$. $(\Rightarrow \forall)$-reducción. Sean $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$ todas las fórmulas de Λ cuyo conectivo principal es $\forall$ y a las cuales no se les ha aplicado ningún paso de reducción en etapas previas. Sean $a_1, \ldots, a_n$ las primeras n variables libres (en la lista de variables) que no están disponibles en esta etapa. Entonces, escriba

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n)$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$. Notar que $a_1, \ldots, a_n$ son nuevas variables libres disponibles.

(21) $k \equiv 20$. $(\exists \Rightarrow)$-reducción.Se define de manera similar a (20).

(22) $k \equiv 21$. $(\Rightarrow \exists)$-reducción. Se define de manera similar a (19).

(23) $k \equiv 22$. $(\circ\forall \Rightarrow)$-reducción. Análogo a (19).

(24) $k \equiv 23$. $(\Rightarrow \circ\forall)$-reducción. Sean $\circ\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \circ\forall x_n A_n(x_n)$ todas las fórmulas de Λ cuyos conectivos principales son $\circ\forall$. Sea a_i la primer variable disponible en esta etapa que no ha sido usada en una reducción de $\circ\forall x_i A_i(x_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, escriba

$$\Pi \Rightarrow \Lambda, \circ A_1(a_1), \ldots, \circ A_n(a_n)$$

arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$.

(25) $k \equiv 24$. $(\circ\exists \Rightarrow)$-reducción. Analogo a (21).

(26) $k \equiv 25$. $(\circ\exists \Rightarrow)$-reducción. Analogo a (22).

(27) $k \equiv 26$. Si Π y Λ tienen alguna fórmula en común, no escribas nada arriba de $\Pi \Rightarrow \Lambda$ (esto queda como un secuente superior). Si Π y Λ no tienen ninguna fórmula en común y las reducciones descriptas en (1)-(26) no son aplicables, entonces escriba el mismo secuente $\Pi \Rightarrow \Lambda$ arriba.

Entonces, la colección de los secuentes que se obtienen por el proceso de reducción anterior, junto con el orden parcial obtenido por este proceso, es el árbol de reducción (para S) y se denota $\mathbf{T}(S)$.

$$\mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\dots\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3),(14)},\mathcal{A}\quad \mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\dots\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3),(14)},\neg\mathcal{A}\quad \mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\dots\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3),(14)},\mathcal{B}\quad \mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\dots\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3),(14)},\neg\mathcal{B}$$

$$\mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\underbrace{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}_{(7)},\underbrace{\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}}_{(5)},\underbrace{\mathcal{B}\wedge\neg\mathcal{B}}_{(5)}\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3)}$$

$$\mathcal{A},\mathcal{B},\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B},\mathcal{A}\vee\mathcal{B},\underbrace{\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}}_{(5)},\underbrace{\mathcal{B}\wedge\neg\mathcal{B}}_{(5)}\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3)}$$

$$\mathcal{A}\vee\mathcal{B},\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A},\mathcal{B}\wedge\neg\mathcal{B}\Rightarrow\underbrace{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}_{(3)}$$

$$\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A},\mathcal{B}\wedge\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\circ\mathcal{A}(a_1)}, \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \underbrace{\exists x \mathcal{A}(x)}, \mathcal{A}(a_1) \qquad \mathcal{A}(a_1), \underbrace{\circ\mathcal{A}(a_1)}, \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \underbrace{\exists x \mathcal{A}(x)}, \mathcal{A}(a_1)$$

$$\underbrace{\circ\mathcal{A}(a_1)}, \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \underbrace{\exists x \mathcal{A}(x)}, \mathcal{A}(a_1) \qquad \underbrace{\circ\mathcal{A}(a_1)}, \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \underbrace{\exists x \mathcal{A}(x)}, \mathcal{A}(a_1), \neg\mathcal{A}(a_1)$$

$$\circ\mathcal{A}(a_1), \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \underbrace{\exists x \mathcal{A}(x)}, \mathcal{A}(a_1)$$

$$\circ\mathcal{A}(a_1), \underbrace{\forall x \circ \mathcal{A}(x)} \Rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)$$

$$\forall x \circ \mathcal{A}(x) \Rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)$$

Lema

Sea S un secuente. Entonces, existe una prueba libre de corte para S, o bien, existe una **QCiore***-estructura y una asignación s que no satisface a S.*

Dem. Sea $\mathbf{T}(S)$ el árbol de descomposición de S.
Si $\mathbf{T}(S)$ es finito, es fácil construir una prueba sin corte para S.
Sino, consideremos una rama infinita de $\mathbf{T}(S)$

$$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \ldots$$

Sean $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ y $\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ y la **QCiore**-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, \| \cdot \|^{\mathfrak{A}} \rangle$, definida como:

- - A es el conjunto de todas las variables libres.
  - si $R \in \mathcal{P}_n$, entonces

$$R^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma \\ \mathbf{0} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \end{cases}$$

y sea $s : \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b \longrightarrow A$ la asignación definida por $s(a) = a$ si a es variable libre, $s(x)$ arbitrario si x es variable ligada. Entonces, s refuta a S. $\square$

- - A es el conjunto de todas las variables libres.
  - si $R \in \mathcal{P}_n$, entonces

$$R^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \\ \frac{1}{2} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma, \neg R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \Gamma \\ \mathbf{0} & \text{si } R(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin \Gamma \end{cases}$$

  y sea $s : \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b \longrightarrow A$ la asignación definida por $s(a) = a$ si a es variable libre, $s(x)$ arbitrario si x es variable ligada. Entonces, s refuta a S. $\square$

Teoremav (Completitud y Eliminación de Corte)

Sea $\Gamma \Rightarrow \Delta$ un secuente. Entonces, si $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es válido, entonces existe una prueba sin corte para $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

¡Muchas Gracias!