INFINITOS CONVIVIENDO EN UN ESTUDIANTE: LAS REFLEXIONES DE D

Andrea Rivera(1),(2) – Jordi Alsina(1) – Virginia Montoro(1),(2)

(1) Depto. de Matemática – Universidad Nacional del Comahue (Bariloche)

(2) IPEHCS (UNCo – CONICET)

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UMA Neuquén 2022

CiN Consejo Interuniversitario Nacional

Universidad Nacional del Comahue 1972

UNCo BARILOCHE

Introducción

- El concepto de **infinito** es una noción fundamental en la matemática avanzada
- La comprensión del número real está mediada por dificultades epistemológicas, cognitivas y educativas, entre las que se destaca la **dificultad para concebir el infinito actual**
- El estudiantado suele presentar una **comprensión lábil del infinito** y muchas veces cambia activamente durante un proceso de reflexión

Objetivo General

Estudiar el dinamismo de las ideas de estudiantes de secundaria y universidad sobre el infinito matemático con relación al número real.

Objetivo Particular

Analizamos los cambios en las concepciones de un estudiante de 3° año del Prof. Univ. en Matemática. Buscamos profundizar en sus comprensiones sobre el infinito, poner a prueba la solidez de las mismas y visualizar la dinámica de cambio de esas ideas.

Metodología

Participantes: nos enfocamos en una entrevista realizada a dos estudiantes de 3° año del Prof. Univ. en Matemática, particularmente mostraremos las reflexiones de uno de ellos (D).

Relevamiento de la información:

- **Cuestionario escrito.** Respondido una semana antes de la entrevista en forma individual y por escrito.

- **Entrevistas semiestructuradas.** Realizadas en parejas con una entrevistadora, video filmadas y transcriptas.

Tarea 1: Representación decimal infinito-periódica de un número racional

Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\widehat{3} = 0,33333..$

El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\overline{32} =$ 0,323232....

De modo que por ejemplo $2,2\widehat{9} = 2,299999\ldots$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\widehat{3} = 0,33333...$ y $0,\overline{32} = 0,3232323232....$

- □ Hay más en $0,\widehat{3} = 0,33333...$
- □ Hay igual cantidad
- □ No sé
- □ Hay más en $0,\overline{32} = 0,3232323232....$
- □ No se pueden comparar

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

Tarea 2: comparación de números con distintas notaciones

Comparando el número $0,\overset{\frown}{9} = 0,9999...$ con 1:

- ☐ $0,\overset{\frown}{9} = 0,9999...$ es mayor que 1
- ☐ $0,\overset{\frown}{9} = 0,9999...$ es menor que 1
- ☐ $0,\overset{\frown}{9} = 0,9999...$ es igual a 1
- ☐ son incomparables:
- ☐ otra posibilidad:
- ☐ no sé

¿Por qué pensás que esto es así?

Tarea 3: comparación de conjuntos numéricos infinitos

A continuación aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?

Categorización de las respuestas a las tres tareas, obtenida en el estudio previo con un cuestionario realizado a 307 estudiantes de secundaria y de universidad de distintas carreras

Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
I1.1. Ajenidad	I2.1. Ajenidad	I3.1. Ajenidad
I1.2. Finitista no justificada	I2.2. Finitista no justificada	I3.2. Los enteros como modelo de inclusión
I1.3. Finitista explícita	I2.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita	I3.3. Finitista no justificada
I1.4. Infinito como indefinido	I2.4. Discretitud explícita o redondeo	I3.4. Finitista explícita (comparando conjuntos)
I1.5. Único infinito	I2.5. Infinito potencial	I3.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos)
I1.6. Infinito cardinal	I2.6. Infinitista no explicada	I3.6. Único infinito (comparando conjuntos)
	I2.7. Infinito actual	I3.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos)

Procedimiento de Análisis

1. Se clasificaron las respuestas al cuestionario dadas por los y las estudiantes en base a la categorización de respuestas a las tareas realizada en el estudio previo antes mencionado.
2. Analizamos el cuestionario para estructurar cómo será la entrevista teniendo en cuenta los puntos interesantes/relevantes a trabajar.
3. Se determinaron los episodios relevantes de la entrevista en cuanto a la discusión de alguna de las tres tareas mencionadas y se analizaron cualitativamente los mismos buscando indicadores del cambio en las concepciones del estudiante respecto del infinito.

Resultados y discusión

Tarea 1

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\hat{3} = 0,33333...$ y $0,\overline{32} = 0,3232323232....$

- ☐ Hay más en $0,\hat{3} = 0,33333...$
- ☐ Hay igual cantidad
- ☐ No sé
- ☐ Hay más en $0,\overline{32} = 0,3232323232....$
- ☑ No se pueden comparar

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

Como poseen infinitas cifras decimales no se puede "contar" la cantidad, pero si le hacemos corresponder c/ tres de $0,\hat{3}$ a cada 3 de $0,\widehat{32}$ podemos hacerle corresponder la misma cantidad.

Infinito como indefinido

Infinito como indefinido

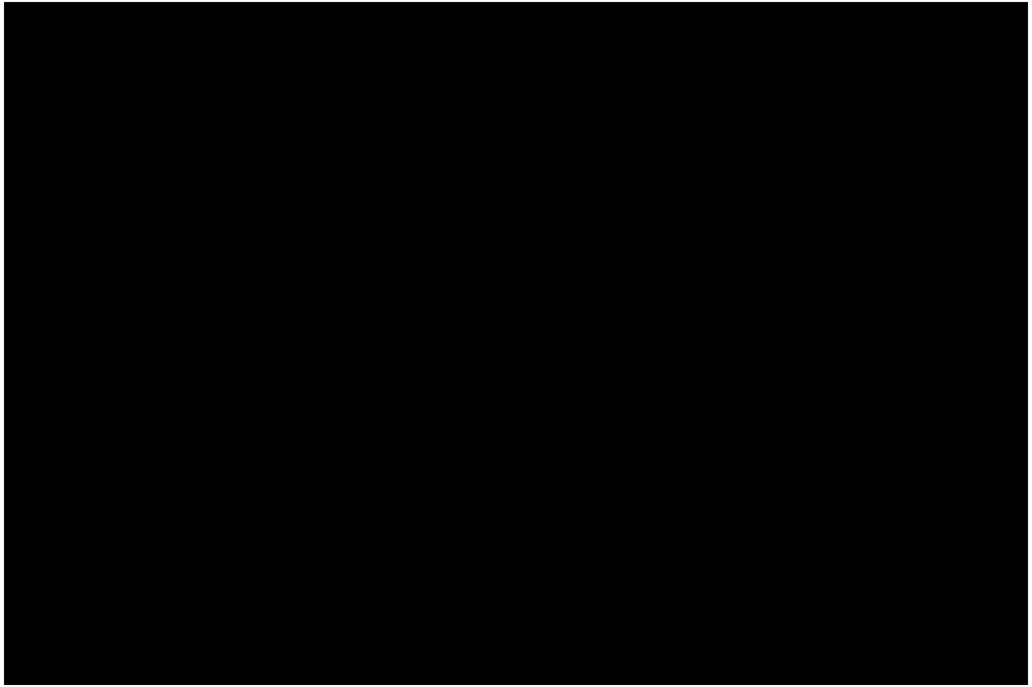
“Primero para poder comparar tenemos que poder contar”

“Si yo comparo dos cosas cuál es más grande que otra, es porque yo sé la cantidad que hay acá y la cantidad que hay en otro conjunto”

“Y como el 0,33 periódico tengo infinitos tres, y el 0,32 también tengo infinitos 3, por más que haya un 2 en medio [...] como son infinitos no puedo compararlos”

Finitista explícita

Infinito potencial

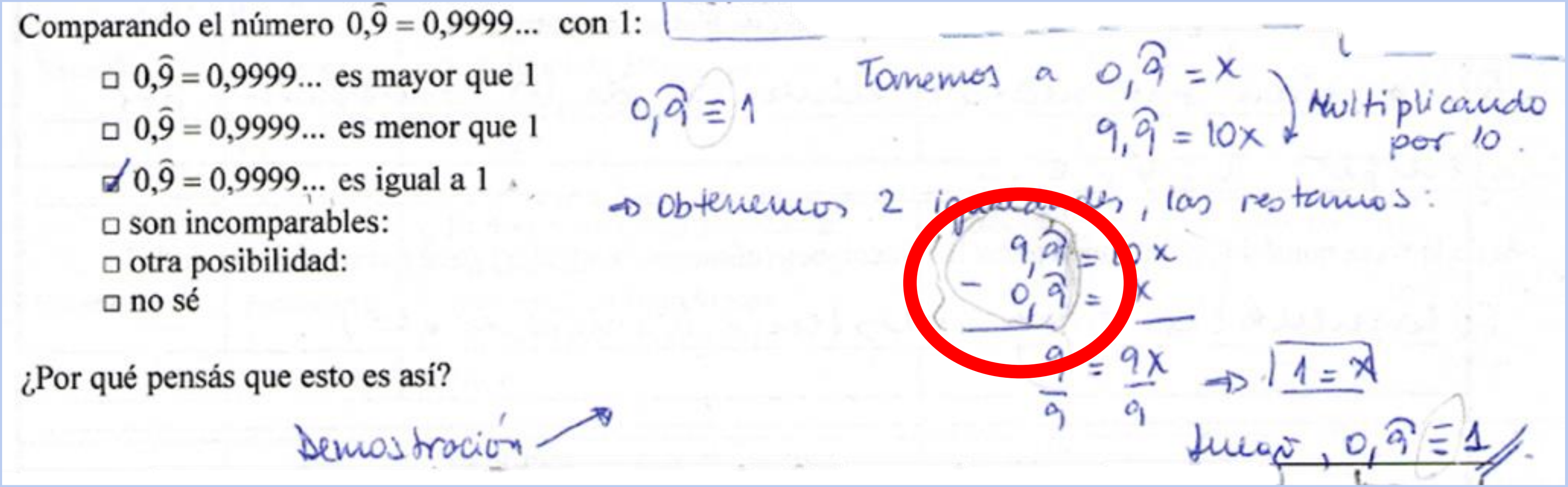


“Solamente estaría correspondiendo un número a otro”

“Pero no estoy contando, porque tampoco puedo volver a contarlos”

“Si el primer 3 del 0,3 periódico le corresponde el primer 3 del 0.32 periódico así podés seguir infinito...Y nunca voy a terminar”

Tarea 2



Comparando el número $0,\hat{9} = 0,9999...$ con 1:

- ☐ $0,\hat{9} = 0,9999...$ es mayor que 1
- ☐ $0,\hat{9} = 0,9999...$ es menor que 1
- ☑ $0,\hat{9} = 0,9999...$ es igual a 1
- ☐ son incomparables:
- ☐ otra posibilidad:
- ☐ no sé

$0,\hat{9} = 1$

Tomemos a $0,\hat{9} = x$

$9,\hat{9} = 10x$ } Multiplicando por 10.

→ Obtenemos 2 igualdades, las restamos:

$$\begin{array}{r} 9,\hat{9} = 10x \\ -\ 0,\hat{9} = x \\ \hline 9 = 9x \end{array}$$

$$\frac{9}{9} = \frac{9x}{9} \rightarrow \boxed{1 = x}$$

Luego, $0,\hat{9} = 1$ //.

¿Por qué pensás que esto es así?

Demostración →

Infinito potencial

Infinito actual

"va a estar pegadísimo, pero no va ser 1"

"hay muchos 9 9 9 que nunca llegan a ser 1"

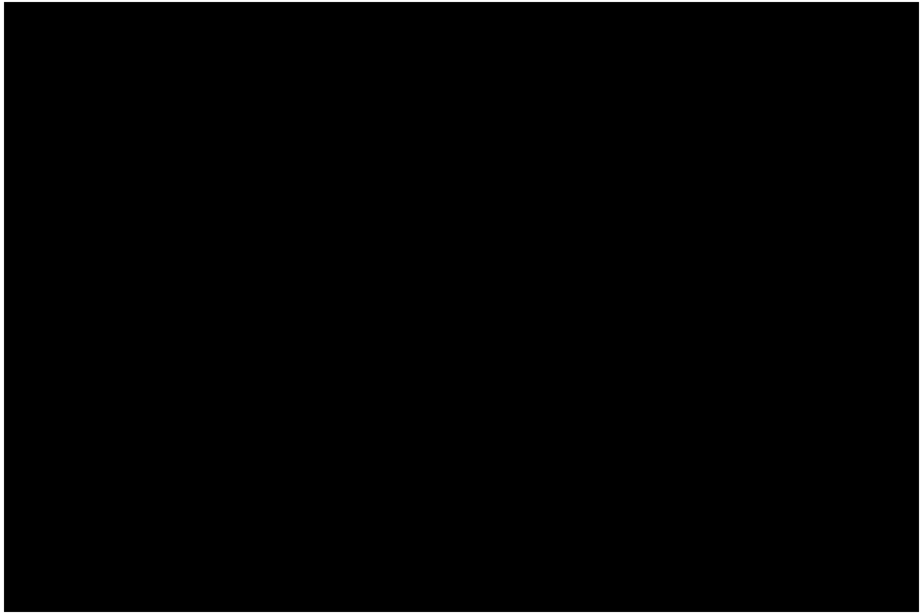
Tarea 3

Capicúas	No capicúas	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☑ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué? Si hacemos corresponder un nro. capicúa a uno no capicúa vamos a tener una correspondencia infinita
Los números primos	Los números pares	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☑ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué? ídem a capicúas y no capicúas. Ej.: Primos Pares 
Naturales	Enteros	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☑ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué? ídem anterior
Enteros	Racionales	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☑ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué? ídem anterior.
Racionales	Irracionales	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☑ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué? ídem anterior.

Infinito como indefinido

Infinito como indefinido

Finitista explícita



Infinito como indefinido

"Entiendo que son contables, porque se corresponden uno a uno"

"Como son infinitas correspondencias por eso a mí me da la noción de infinito no se puede contar."

Conclusiones

- ★ Las concepciones "finitista" e "infinito como indefinido" de D se presentan como **persistentes** aun cuando lo enfrenta a contradicciones. Si bien al reflexionar él exhibe otras visiones, **mantiene la idea de la imposibilidad de pensar en colecciones infinitas en acto**. Observamos que esta noción se le presenta como de gran complejidad cognitiva.
- ★ Consideramos que conocimientos proporcionados en su formación matemática (como los conjuntos numéricos, su operatoria, y el uso de biyecciones) resultaron **fundamentales para las reflexiones de D**, ayudando en la explicitación de sus ideas y articulando razonamientos más complejos.

¡Muchas gracias!

Arrigo, G., D’Amore, B. y Sbaragli S. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático*. Ediciones Didácticas Magisterio.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. y otros (Eds.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (97-140). Bogotá: Iberoamérica.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 409 - 427. ISSN:0210-3702.

Montoro, V., Scheuer, N. y Pérez-Echeverría, P. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, *28*(3) 145-174

Rivera, A., Bianchi M. J. y Montoro, V. (2021). Dinámica en las concepciones del infinito matemático en contexto del número real. *Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina 2021- virtUMA. Noticiero de la UMA*, *56*(2), 38-41. ISSN:1514-9609

Moreno-Armella, L. y Waldegg. G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 211-231.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l’instruction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *5*, 19-36.